Séries de Engel

On note E l'ensemble formé des suites de nombres entiers $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$p_0>1 \text{ et pour tout } n\geq 0,\ p_n\leq p_{n+1}.$$

1. Etant donnée une suite $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on forme une suite réelle (x_n) en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0p_1\cdots p_k}=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0p_1}+\cdots+\frac{1}{p_0p_1\cdots p_n}$$

1.a Calculer x_n quand la suite (p_n) est constante égale à $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Quelle est alors la limite de la suite (x_n) ?

1.b On revient au cas général.
Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel $x\in]0,1]$.

On pose alors $f(p)=x$ ce qui définit une application $f:E\to]0,1]$

2. Soit $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $q=(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E.

2.a On suppose $p_0>q_0$. Etablir que $f(p)<f(q)$.

2.b Montrer que f est injective.

3. Soit x un réel de l'intervalle $]0,1]$. On définit une suite (y_n) comme suit :

$$y_0=x\in]0,1] \text{ puis pour tout } n\geq 0$$

$$y_{n+1}=p_ny_n-1 \text{ avec } p_n \text{ la partie entière de } 1+y_n^{-1}.$$

3.a Justifier que la suite (y_n) est bien définie et que c'est une suite décroissante d'éléments de $[0,1[$.

3.b Exprimer x en fonction $p_0,p_1,\ldots,p_n$ et de y_n.

3.c Conclure que la fonction f est surjective.

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0,1]$ et $p=(p_n)$ l'unique suite de E telle que $f(p)=x$.
Montrer que :

$$x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,p_n=p_N$$

Correction

1.a $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p^{k+1}}=\frac{1}{p}\frac{1-(1/p)^{n+1}}{1-1/p}=\frac{1-(1/p)^{n+1}}{p-1}$. $x_n\to\frac{1}{p-1}$ car $p\geq 2$ donc $|1/p|<1$.

1.b $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{p_0\cdots p_{n+1}}\geq x_n$ donc (x_n) est croissante. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n\geq 2$ donc $x_n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}=1$. La suite (x_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers un certain réel x. Puisque $x_0\leq x_n\leq 1$, à la limite $x_0\leq x\leq 1$ or $x_0>0$ donc $x\in]0,1]$.

2.a Avec les notations du 1., $f(p)=\lim_{n\to+\infty}x_n$. $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0p_1\cdots p_k}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0^{k+1}}=\frac{1}{p_0-1}$ car $p_1,\ldots,p_k\geq p_0$. A la limite, on obtient $f(p)\leq\frac{1}{p_0-1}$. Or $p_0>q_0$ donc $p_0-1\geq q_0$ d'où $f(p)\leq\frac{1}{q_0}$ mais $f(q)\geq\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_0q_1}>\frac{1}{q_0}$ donc $f(p)<f(q)$.

2.b Supposons $p\neq q$ et considérons ℓ le plus petit indice tel que $p_\ell\neq q_\ell$. Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p_\ell>q_\ell$. Notons $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0\cdots p_k}$ et $y_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0\cdots p_k}$. Pour $n\geq\ell$, on a

$x_n = \dfrac{1}{p_0 \cdots p_{\ell-1}} \sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{p_\ell \cdots p_k}$ et $y_n = \dfrac{1}{q_0 \cdots q_{\ell-1}} \sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{q_\ell \cdots q_k}$ avec $p_0 \cdots p_{\ell-1} = q_0 \cdots q_{\ell-1} \neq 0$. Comme dans la question 2.a, puisque $p_\ell > q_\ell$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{p_\ell \cdots p_k} < \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{q_\ell \cdots q_k}$ donc $f(p) < f(q)$. Finalement $p \neq q \Rightarrow f(p) \neq f(q)$.

3.a Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n) =$ « y_n existe et $y_n \in]0,1]$ ».
La propriété est bien entendu vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang $n \geq 0$.
Par hypothèse de récurrence y_n existe et $y_n > 0$ donc $p_n = E(1+1/y_n)$ existe et par suite $y_{n+1} = p_n y_n - 1$ aussi. Comme $p_n \leq 1+1/y_n < p_n + 1$, on a $p_n y_n \leq y_n + 1 < p_n y_n + y_n$ car $y_n > 0$. La première inégalité donne $y_{n+1} = p_n y_n - 1 \leq y_n \leq 1$ et la seconde donne $y_{n+1} = p_n y_n - 1 > 0$. Ainsi $y_{n+1} \in]0,1]$ et la récurrence est établie. De plus, durant la démonstration de celle-ci, on a vu $y_{n+1} \leq y_n$ ce qui assure la décroissance de la suite (y_n).

3.b $x = y_0 = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{y_1}{p_0} = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0 p_1} + \dfrac{y_1}{p_0 p_1} = \ldots = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0 p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_0 p_1 \cdots p_n} + \dfrac{y_n}{p_0 p_1 \cdots p_n}$.

3.c Considérons $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. p est une suite d'entiers, $p_0 = E(1+1/y_0) \geq 2$ car $y_0 = x \leq 1$ et enfin p est une suite croissante car $p_n = E(1+1/y_n)$ et que la suite (y_n) est décroissante. Comme $\left| x - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{p_0 \cdots p_k} \right| \leq \dfrac{y_n}{p_0 \cdots p_n} \leq \dfrac{1}{p_0 \cdots p_n} \leq \dfrac{1}{2^n} \to 0$, on peut affirmer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{p_0 \cdots p_k} = x$ autrement dit $f(p) = x$. Comme ceci vaut pour tout $x \in]0,1]$, on conclut que f est surjective (et finalement bijective).

4. On reprend les notations du 1.
($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $p_n = p_N$. On a alors, pour tout $n \geq N$, $x_n = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0 p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_0 p_1 \cdots p_N} + \dfrac{1}{p_0 p_1 \cdots p_N} \sum_{k=1}^{n-N} \dfrac{1}{p_N^k}$ donc
$x = \lim_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0 p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_0 p_1 \cdots p_N} + \dfrac{1}{p_0 p_1 \cdots p_N (p_N - 1)} \in \mathbb{Q}$.
($\Rightarrow$) Supposons $x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. En reprenant les notations du 3., montrons par récurrence qu'on peut écrire $y_n = a_n/b$ avec $a_n \in \mathbb{N}^*$. Au rang 0, la propriété est vraie et si elle est vraie au rang n alors $y_{n+1} = p_n y_n - 1 = (p_n a_n - b)/b = a_{n+1}/b$ avec a_{n+1} entier qui est nécessairement strictement positif car y_{n+1} l'est. La récurrence est établie. Puisque la suite (y_n) est décroissante, la suite de terme général $a_n = b y_n$ l'est aussi, or c'est là une suite d'entiers naturels, elle est donc stationnaire et il en est de même de la suite (y_n). Il en découle que la suite (p_n) définie par $p_n = E(1+y_n^{-1})$ est elle aussi stationnaire et l'implication est démontrée.